# اصول سیستم های کامپیوتری

جبر بول
(Boolean Algebra)

باقر سلامی
bagher.salami@mail.um.ac.ir
http://salami.toosraham.ir/

# سرفصل مطالب

- (بخش ۱-۳ و ۱-۴ مرجع ۱)
- عملوندهای جبر بول
- توابع بول
- پیاده سازی یک تابع بول با دروازه های منطقی
- دوگان یک تابع
- جدول کارنو
- حالات بدون تفاوت

# جبر بول

- در جبر بول هر متغیر فقط دو مقدار درست (True) یا نادرست (False) دارد. مقدار درست با ۱ و مقدار نادرست با صفر نشان داده می شود.

- عملگرهای اصلی جبر بول عبارتند از AND و OR و NOT (inverter)

# عملگرهای اصلی جبر بول

- **در جبر بول هر متغیر فقط دو مقدار درست (True) یا نادرست (False) دارد. مقدار درست با ۱ و مقدار نادرست با صفر نشان داده می شود.**

| Name | Graphic symbol | Algebraic function | Truth table |
|---|---|---|---|
| AND | | $x = A \cdot B$ or $x = AB$ | A B \| x<br>0 0 \| 0<br>0 1 \| 0<br>1 0 \| 0<br>1 1 \| 1 |
| OR | | $x = A + B$ | A B \| x<br>0 0 \| 0<br>0 1 \| 1<br>1 0 \| 1<br>1 1 \| 1 |
| Inverter | | $x = A'$ | A \| x<br>0 \| 1<br>1 \| 0 |

خروجی عملگر «و» درست است اگر هر دو عملوند درست باشد

خروجی عملگر «یا» درست است اگر حداقل یکی از عملوندها درست باشد

خروجی عملگر «مکمل» معکوس ورودی می باشد

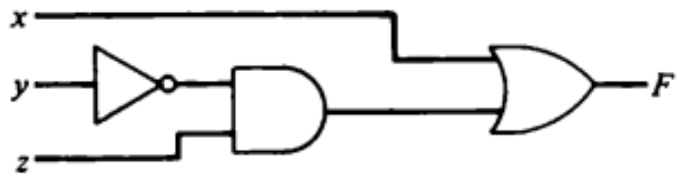
# تابع بول

- یک تابع بول با استفاده از متغیرها و عملگرهای منطقی و پرانتز نوشته می شود.
- در تابع زیر **F** برابر یک است اگر **x** برابر یک باشد یا **y** برابر صفر و **z** یک باشد.

Figure 1-3 Truth table and logic diagram for $F = x + y'z$.

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(a) Truth table




(b) Logic diagram

# اتحادهای اصلی جبر بول

**TABLE 1-1** Basic Identities of Boolean Algebra

| | |
|---|---|
| (1) $x + 0 = x$ | (2) $x \cdot 0 = 0$ |
| (3) $x + 1 = 1$ | (4) $x \cdot 1 = x$ |
| (5) $x + x = x$ | (6) $x \cdot x = x$ |
| (7) $x + x' = 1$ | (8) $x \cdot x' = 0$ |
| (9) $x + y = y + x$ | (10) $xy = yx$ |
| (11) $x + (y + z) = (x + y) + z$ | (12) $x(yz) = (xy)z$ |
| (13) $x(y + z) = xy + xz$ | (14) $x + yx = (x + y)(x + z)$ |
| (15) $(x + y)' = x'y'$ | (16) $(xy)' = x' + y'$ |
| (17) $(x')' = x$ | |

# دوگان یک تابع

- **اگر در یک تابع تمام AND ها به OR**
- **تمام OR ها به AND**
- **تمام یک ها به صفر**
- **تمام صفرها به یک تبدیل شود دوگان آن تابع بدست می آید.**
- **اگر یک تابع درست باشد، دوگان آن نیز درست است.**

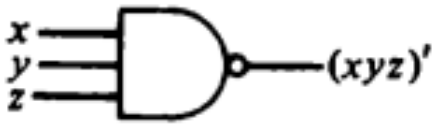
# NAND

- اگر خروجی دروازه **AND** مکمل شود بدست می آید.
- مزیت **NAND** این که تمام مدارات منطقی را می توان با **NAND** ساخت.

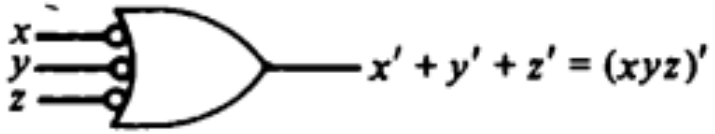
NAND

| A | B | x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Figure 1-5** Two graphic symbols for NAND gate.




(a) AND-invert

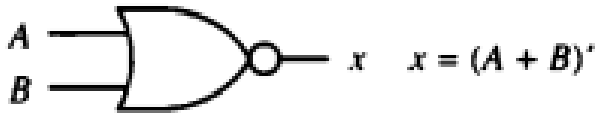



(b) invert-OR

# NOR

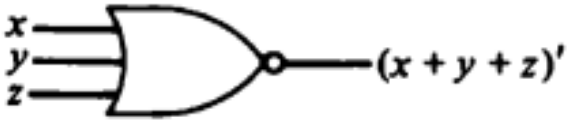
- اگر خروجی دروازه **OR**مکمل شود بدست می آید.
- مزیت **NOR**این که تمام مدارات منطقی را می توان با **NOR**ساخت.

NOR

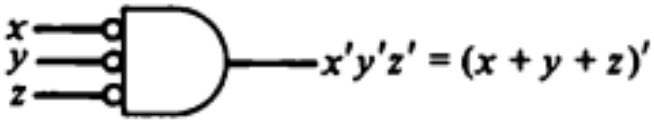



| A | B | x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

**Figure 1-4** Two graphic symbols for NOR gate.




(a) OR-invert




(b) invert-AND

# XNOR و XOR

**Exclusive-OR (XOR)**

$x = A \oplus B$
or
$x = A'B + AB'$

| A | B | x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Exclusive-NOR or equivalence**

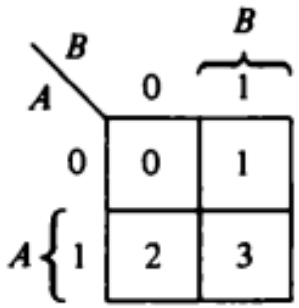
$x = (A \oplus B)'$
or
$x = A'B' + AB$

| A | B | x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

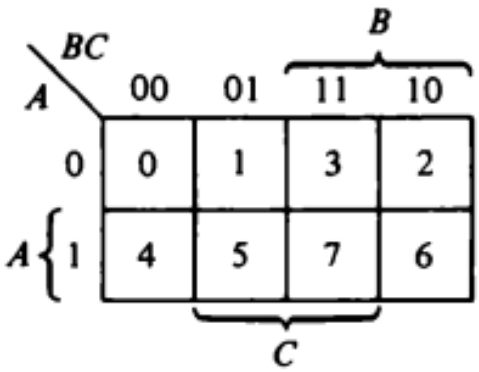
# ساده سازی عبارات بول

- **برای ساده سازی عبارات جبر بول از جدول کارنو ( Karnaugh Map) استفاده می شود.**
- **در جدول کارنو هر خانه معادل یک مینترم می باشد.**
- **هر سطر جدول درستی یا هر ترکیب متغیرها را یک مینترم می باشد.**
- **در جدول کارنو هر خانه با خانه همسایه آن در مکمل بودن یک متغیر اختلاف دارد.**

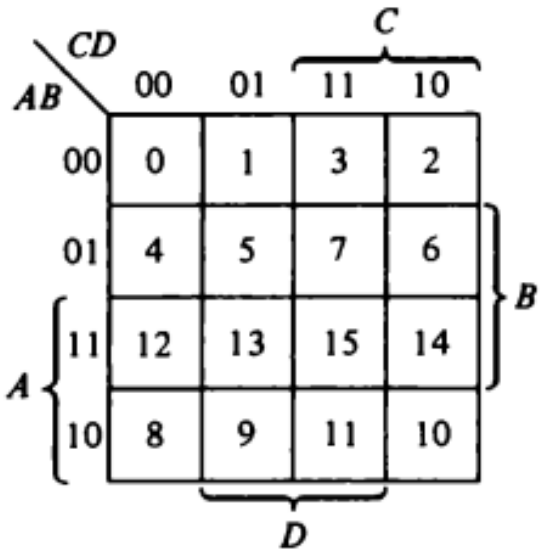
# جدول کارنو




(a) Two-variable map




(b) Three-variable map

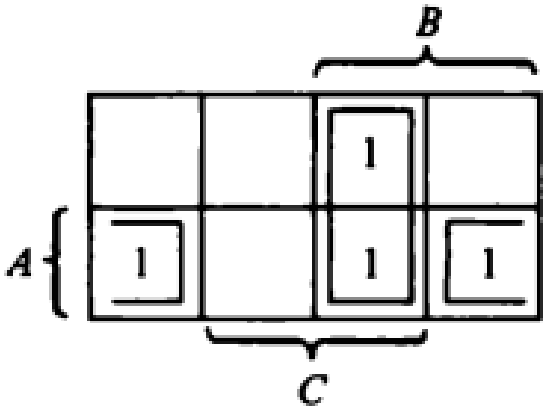



(c) Four-variable map

**Figure 1-7** Maps for two-, three-, and four-variable functions.

# جدول کارنو

**Figure 1-8** Map for $F(A, B, C) = \Sigma(3,4,6,7)$.




$$F = BC + AC'$$

# جدول کارنو

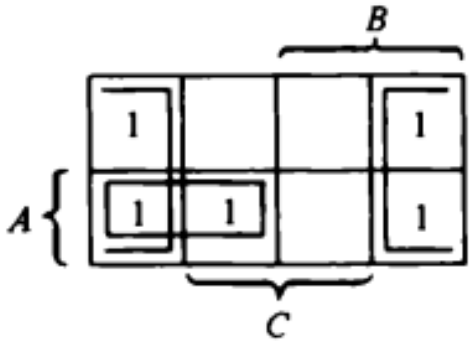
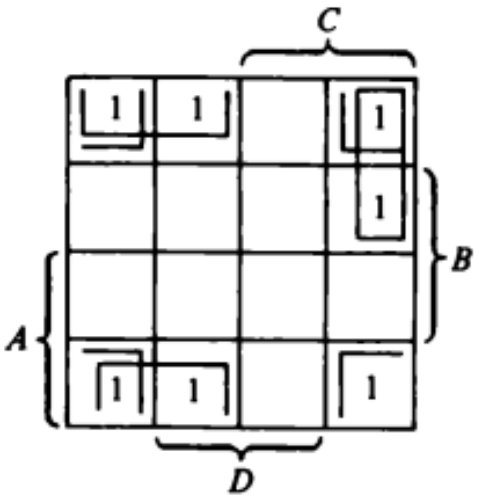



**Figure 1-9** Map for $F(A, B, C) = \Sigma(0,2,4,5,6)$.

$$F = C' + AB'$$

# جدول کارنو

**Figure 1-10** Map for $F(A, B, C, D) = \Sigma(0,1,2,6,8,9,10)$.




$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

# حالات بدون تفاوت

- **حالات بدون تفاوت حالاتی است که یک یا صفر بودن خروجی مدار وجود ندارد یا اینکه آن حالت احتمال وقوع ندارد**

$$F(A, B, C) = \Sigma\,(0, 2, 6)$$

$$d(A, B, C) = \Sigma\,(1, 3, 5)$$

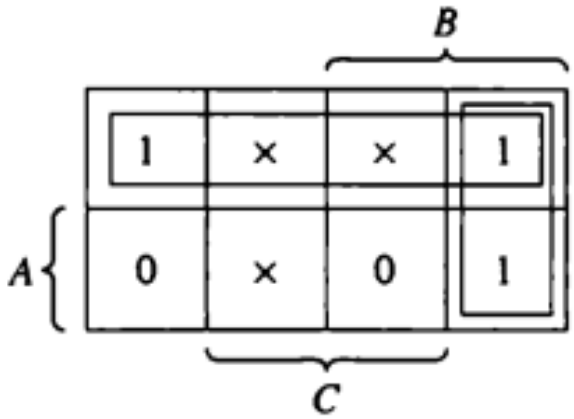



**Figure 1-14** Example of map with don't-care conditions.

$$F = A' + BC'$$

# خودآزمایی

## ۱- کنکور کارشناسی ارشد - ۱۳۷۹

۹- برای تابع بولی ۵ متغیرهٔ زیر ساده‌ترین صورت حاصل جمع حاصلضربها کدام است؟

$$F(A,B,C,D,E) = \sum(0,3,8,14,15,16,18.24,26,27,29) \text{ و } d(6,7,9,19,22)$$

۱) $\bar{C}\bar{D}\bar{E}+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}\bar{E}+ABCD\bar{E}$

۲) $\bar{A}CD+\bar{C}\bar{D}E+\bar{B}CD+A\bar{B}DE+ABC\bar{D}E$

۳) $\bar{A}CD+\bar{C}\bar{D}E+A\bar{C}D+A\bar{B}\bar{C}E+ABC\bar{D}E$

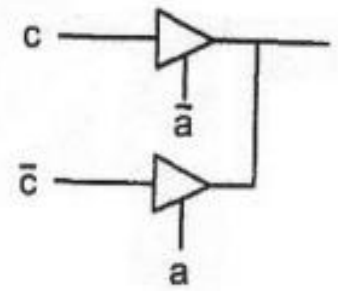
۴) $\bar{A}CD+A\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}\bar{E}+ABCD\bar{E}+\bar{C}\bar{D}E$

# خودآزمایی

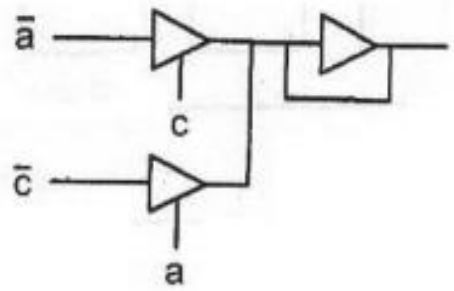
## ۲- کنکور کارشناسی ارشد - ۱۳۸۰

۱۲- کدامیک از مدارهای زیر، تابع $\bar{a}bcd + (a \oplus c)$ را پیاده‌سازی می‌نماید؟

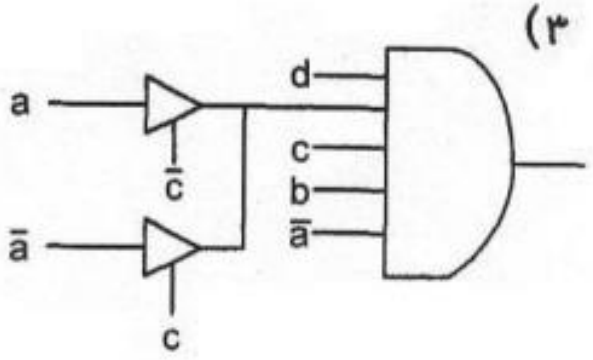
۱)



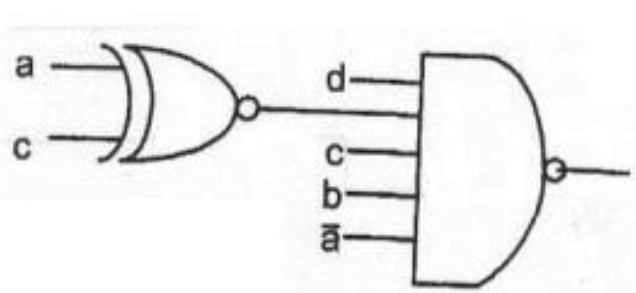

۲)




۳)




۴)



# خودآزمایی

## ۳- کنکور کارشناسی ارشد - ۱۳۸۵

۶۳- در SOP داده شده زیر کدام Product Term ها حتماً می‌بایست در حل مدار شامل شود؟

$W(a,b,c,d) = \sum m\ (۴, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۱, ۱۴, ۱۵)$

۱) $bc, a\bar{b}\bar{d}, a\bar{b}d$

۲) $bc, a\bar{b}\bar{c}, acd$

۳) $bc, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}b\bar{d}$

۴) $bc, a\bar{b}\bar{c}, a\bar{b}\bar{d}, a\bar{b}d$